

ASTRONOMIE

DETERMINATION EXPERIMENTALE DE NOTRE LATITUDE ET NOTRE LONGITUDE

A l'occasion de l'année internationale de l'Astronomie, l'Association Réunionnaise pour l'Etude du Ciel Austral (A.R.E.C.A) et la faculté des sciences de l'Université de La Réunion, ont réalisé une expérience astronomique amusante consistant en la détermination de la position sur le globe terrestre de notre île. Il s'agit donc de déterminer notre latitude et notre longitude.

Parallèlement une détermination similaire devait être réalisée aux Seychelles par un astronome amateur local, Monsieur Jacques Isnard.

La mise en commun des résultats obtenus en ces deux lieux permettant la mesure du rayon terrestre avec une méthode proche de celle d'Eratosthène.

L'équinoxe de printemps austral se situait cette année le mardi 22 septembre.

Une répétition générale avec des étudiants volontaires de l'U.E libre d'astronomie était réalisée le samedi 19 septembre sur le toit terrasse du bâtiment principal de la F.S.T.

L'expérience réelle devant avoir lieu le lundi 21 septembre et le mardi 22 septembre.

Le temps a été très favorable le samedi et le lundi, malheureusement le ciel de mardi trop couvert n'a pas permis de réitérer l'expérience.

C'est donc les résultats obtenus le lundi 21 qui sont présentés ici...

Protocole expérimental :

Deux expériences différentes ont été réalisées.

Expérience 1 :

Un poteau sensiblement vertical a été posé sur la terrasse à l'intersection de deux rangées de carrelage qui servira de repère orthonormé. L'ombre de l'extrémité de ce poteau a été repérée tout au long de la journée pour matérialiser la trajectoire correspondante. L'instant où la longueur de l'ombre est la plus courte correspond au midi solaire du lieu. La longueur de cette ombre la plus courte permet la mesure de notre latitude. La direction de cette ombre matérialise l'axe Nord/Sud. En connaissant l'heure du midi solaire sur le méridien de Greenwich il est possible de déterminer notre longitude.

Expérience 2 :

L'expérience 1 semblant un peu grossière et donc peu précise a priori, une deuxième expérience plus raffinée était également effectuée. Un gnomon fabriqué pour l'occasion par l'A.R.E.C.A était utilisé. Un fil à plomb monté sur un plateau horizontal et muni d'un repère permettait de noter la position de l'ombre de ce repère sur le plateau avec une précision a priori plus grande que celle de l'expérience 1. L'exploitation des résultats restant identique.



Expérience 1



Expérience 2

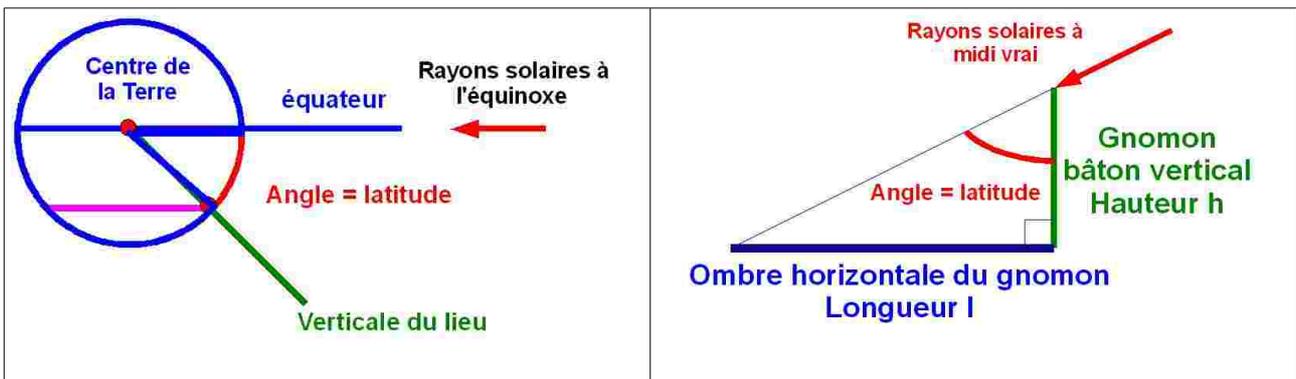
Résultats obtenus :

Les résultats obtenus et leur exploitation détaillée feront l'objet d'une leçon en amphithéâtre. Nous résumerons ici les résultats obtenus le lundi 21 septembre.

Mesure de la latitude :

Le jour choisi pour l'expérience n'est pas quelconque, c'est le jour de l'équinoxe, en ce jour, le Soleil passe exactement au zénith de l'équateur à midi. Par définition, la latitude d'un lieu est l'angle entre la verticale de ce lieu et l'équateur terrestre, le jour de l'équinoxe à midi, la mesure de l'ombre d'un bâton permet donc la mesure directe de la latitude du lieu, les rayons du Soleil « matérialisant » la direction de l'équateur. Un simple petit calcul trigonométrique va permettre de mesurer très facilement sa latitude : $\text{tg}(\alpha) = h / l$

α est la latitude du lieu, h la longueur du bâton et l la longueur de l'ombre au midi solaire du lieu. Voir les schémas suivants :



On peut également montrer que ce jour là, la trajectoire de l'ombre est la droite EST/OUEST et que les abscisses des points représentatifs obéissent à une relation du type $x = (h / \cos \alpha) * \tan(C * t)$. h est la hauteur du poteau, α est la latitude du lieu, C est la vitesse angulaire de rotation de la terre sur elle-même soit $C = 15^\circ/h$, t est le temps. L'origine des abscisses et celle du temps correspondent à l'abscisse et au temps du midi solaire observé sur le lieu de l'expérience. La pente observée de la droite expérimentale permet donc d'accéder à la latitude du lieu.

Expérience 1 :

La photo précédente montre que l'alignement des petits flacons posés au fur et à mesure pour marquer l'ombre de l'extrémité du poteau est presque parfait.

Les étudiants ont donc repéré les abscisses et ordonnées de tous ces points en utilisant le carrelage comme repère orthonormé ayant pour origine la base du poteau.

Soit les résultats suivants :

Heure	Minute	t(h)	tcor(h)	x(cm)	y(cm)	d(cm)
7	6	7,1	-5,08333333	-1340	398	1397,85693
7	18	7,3	-4,88333333	-1083	343	1136,01849
7	30	7,5	-4,68333333	-915	311	966,408816
7	45	7,75	-4,43333333	-748	277,5	797,815925
8	0	8	-4,18333333	-640	258	690,046375
8	15	8,25	-3,93333333	-536	235	585,252937
8	30	8,5	-3,68333333	-458	220,5	508,315109
8	45	8,75	-3,43333333	-397	207	447,725362
9	0	9	-3,18333333	-286	193	345,028984
10	30	10,5	-1,68333333	-131	155	202,943342
11	0	11	-1,18333333	-80	145	165,604952
12	0	12	-0,18333333	12,5	127	127,613675
12	11	12,1833333	0	30	125	128,549601

Les coordonnées des points connus, il est facile de déduire la longueur de l'ombre à chaque instant.

Le midi solaire a été trouvé à 12 h 11 min grâce à l'expérience 2 conduite simultanément.

L'arrivée de nuages n'a pas permis de poursuivre l'expérience plus longuement.

Le tracé de la droite $y = f(x)$ montre une excellente corrélation linéaire. (voir graphique).

Un seul point s'écarte légèrement de la droite :

$x = -286$ cm et $y = 193$ cm correspondant à $t = -3,183$ h.

Le tracé de la courbe $l = f(t)$ longueur de l'ombre en fonction du temps, montre une bonne régularité avec à nouveau le même point s'en écartant sensiblement.

Nous venons donc de vérifier expérimentalement que la trajectoire de l'ombre est bien une droite le jour de l'équinoxe.

La longueur observée de l'ombre la plus courte est de 128,54 cm au midi solaire (12 h 11 min).

La hauteur du poteau utilisé étant $h = 321,3$ cm nous pouvons déterminer notre latitude.

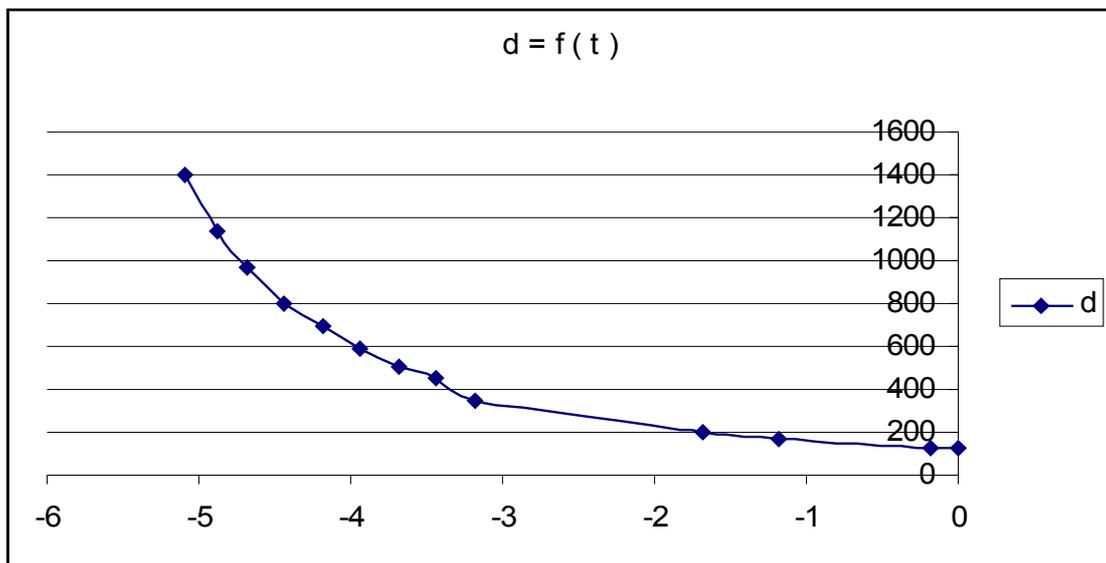
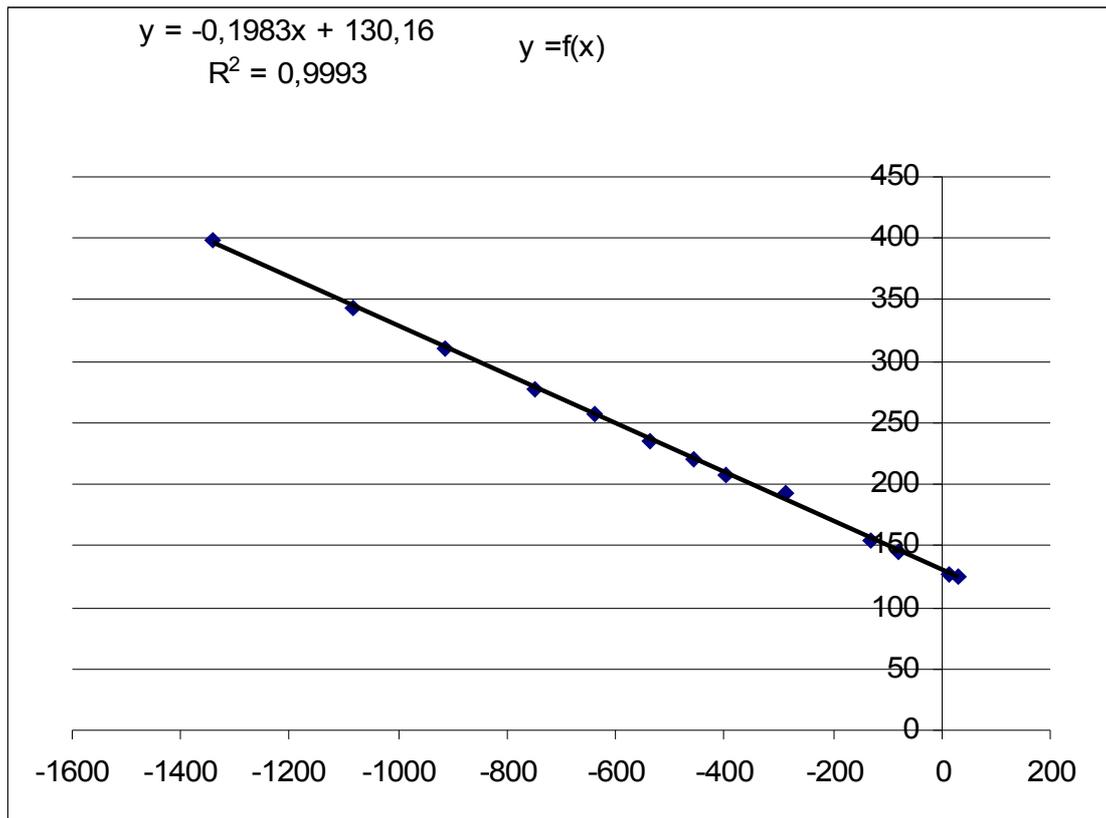
$\alpha = \text{atan}(l/h) = \text{atan}(128,5/321,3) = 0,380 \text{ rad} = 21,798^\circ$

La latitude vraie du lieu déterminée par G.P.S est $\alpha = 20,901^\circ$.

Notre écart est donc de $0,897^\circ$ soit de 4 %.

Assez bonne précision pour une expérience a priori simpliste et grossière !

Sachant que la circonférence terrestre est d'environ 40000 km notre erreur de $0,9^\circ$ représente une erreur de 100 km environ.



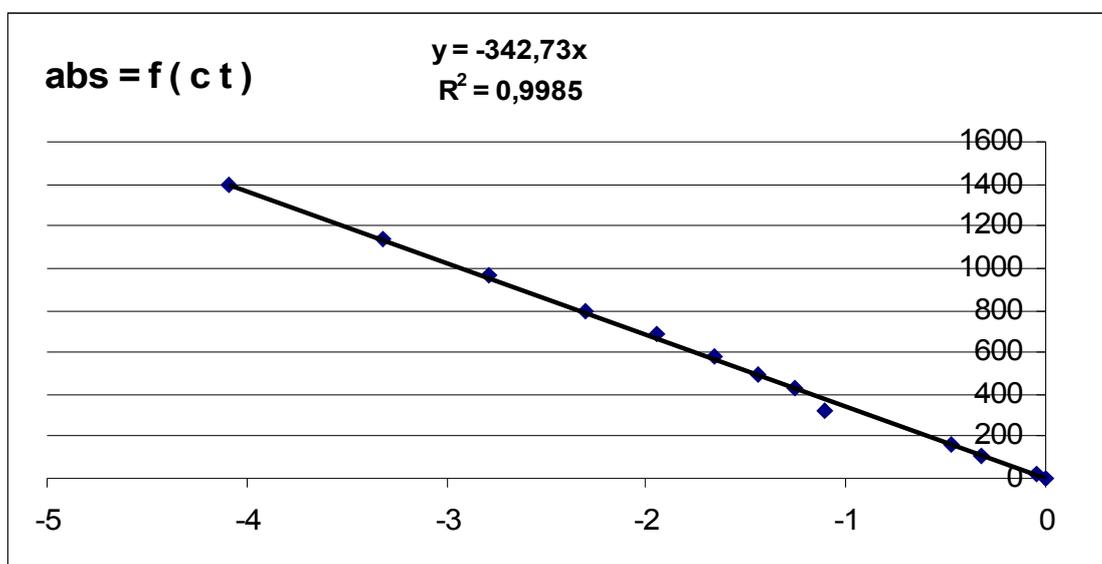
Nous pouvons maintenant utiliser la deuxième méthode qui consiste à vérifier que les abscisses des points repérés en prenant comme origine le midi vrai obéissent à la relation $x = (h / \cos \alpha) * \tan (C * t)$ puis d'en tirer la valeur de α .

Un petit calcul permet d'obtenir facilement les abscisses des points dans le nouveau repère à partir de leur coordonnées dans le repère du carrelage.

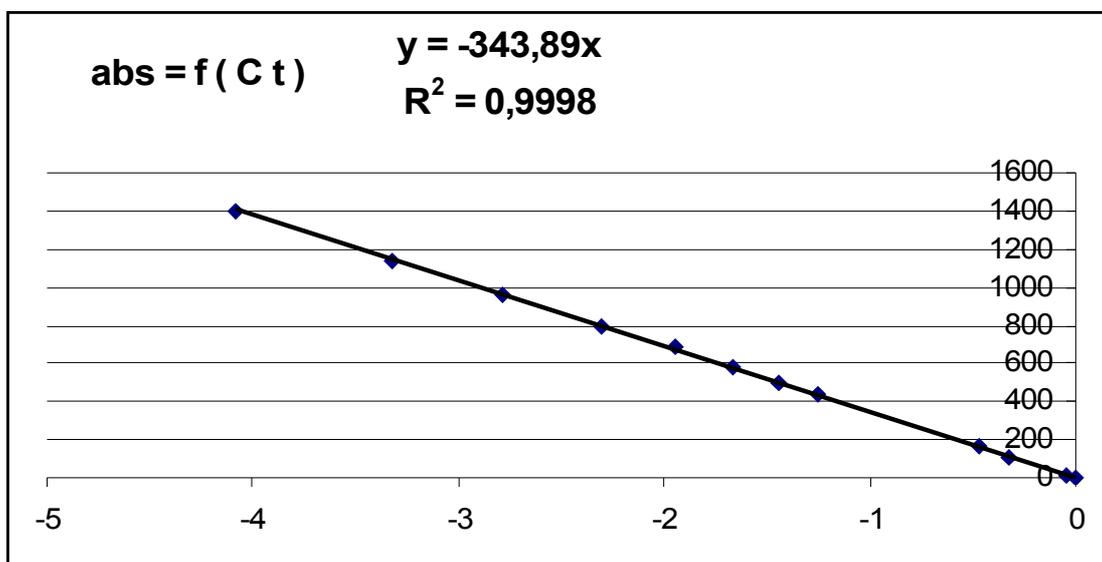
On trace ensuite la courbe $abs = f (C * t)$.

On observe à nouveau une excellente corrélation linéaire (voir graphique).

tcor	x	y	tan(ct)	abs
-5,08333333	-1340	398	-4,0866627	1396,93557
-4,88333333	-1083	343	-3,32263623	1134,14858
-4,68333333	-915	311	-2,78523069	963,130832
-4,43333333	-748	277,5	-2,29984255	792,805304
-4,18333333	-640	258	-1,94161998	683,073203
-3,93333333	-536	235	-1,66427948	576,589976
-3,68333333	-458	220,5	-1,44149404	497,256724
-3,43333333	-397	207	-1,2571723	434,802254
-3,18333333	-286	193	-1,10091414	323,233662
-1,68333333	-131	155	-0,47163062	163,771182
-1,18333333	-80	145	-0,32010252	111,803399
-0,18333333	12,5	127	-0,04803344	17,613915
0	30	125	0	0



On remarque à nouveau le point aberrant pour $t = -3,183$ h.
 Il est légitime de l'éliminer, on obtient alors la corrélation suivante :



La pente de notre droite expérimentale est donc de $p = 343,89$.
 Cette pente est équivalente à $p = h / \cos \alpha$ et nous pouvons donc déterminer $\alpha = \arccos (h / p)$
 soit $\alpha = 0,3645 \text{ rad} = 20,883^\circ$.

La latitude vraie du lieu déterminée par G.P.S est $a = 20,901^\circ$.
 Notre écart est donc de $0,018^\circ$ soit de $0,1\%$.

Jolie précision pour une expérience a priori simpliste et grossière !

Sachant que la circonférence terrestre est d'environ 40000 km notre erreur de $0,02^\circ$ représente une erreur de 2 km environ.

Expérience 2 :

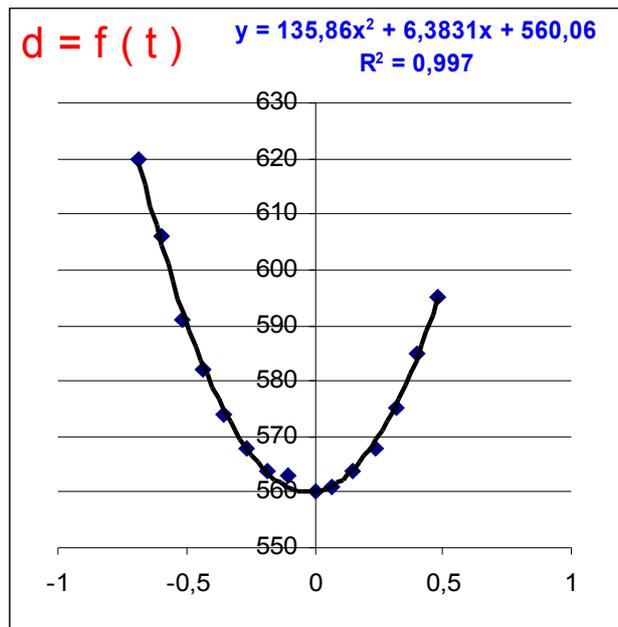
Heure	minute	t	tcor	d	tan ct	x
11	30	11,5	-0,68333333	620	-0,18082946	-272
11	35	11,58333333	-0,6	606	-0,15838444	-238
11	40	11,66666667	-0,51666667	591	-0,13609403	-207
11	45	11,75	-0,43333333	582	-0,11393561	-170
11	50	11,83333333	-0,35	574	-0,09188709	-138
11	55	11,91666667	-0,26666667	568	-0,06992681	-107
12	0	12	-0,18333333	564	-0,04803344	-73
12	5	12,08333333	-0,1	563	-0,02618592	-42
12	11	12,18333333	0	560	0	0
12	15	12,25	0,06666667	561	0,01745506	25
12	20	12,33333333	0,15	564	0,03929011	59
12	25	12,41666667	0,23333333	568	0,06116262	90
12	30	12,5	0,31666667	575	0,08309359	120
12	35	12,58333333	0,4	585	0,10510424	160
12	40	12,66666667	0,48333333	595	0,12721607	188

Le principe des calculs est strictement identique à l'expérience 1.

La longueur d de l'ombre est directement mesurée sur le plateau et l'abscisse des points également.

Le graphique $d = f (t)$ est bien régulier et peut être correctement modélisé par une parabole.

On remarque un point s'écartant légèrement de la courbe pour $t = -0,1 \text{ h}$.



Le midi solaire vrai est trouvé à 12 h 11 min et la longueur de l'ombre est alors de 560 mm.

La hauteur du gnomon étant de 1400 mm on en déduit notre latitude.

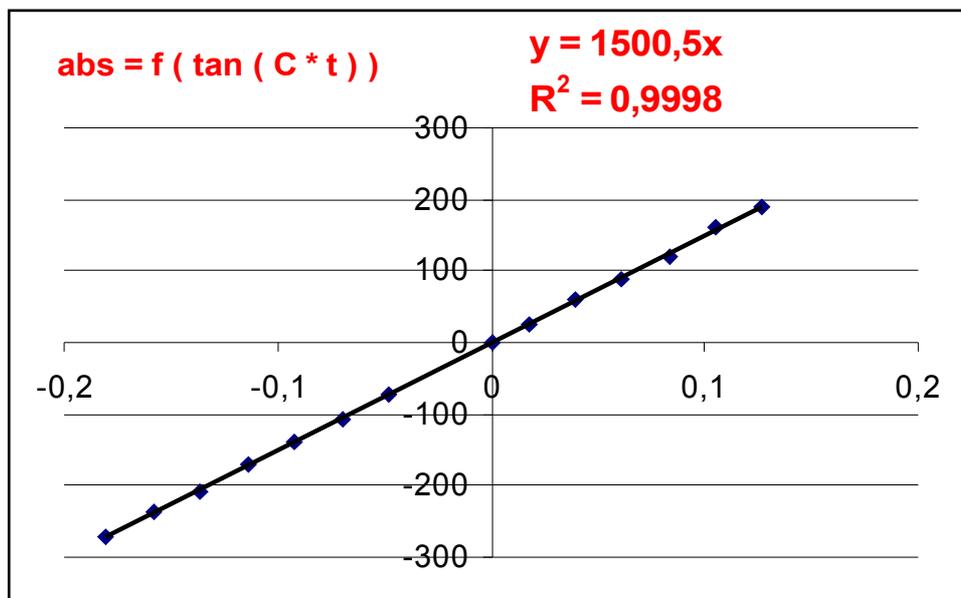
$$\alpha = \text{atan} (560 / 1400) = 0,3805 \text{ rad} = 21,801^\circ$$

La latitude vraie du lieu déterminée par G.P.S est $\alpha = 20,901^\circ$.

Notre écart est donc de $0,9^\circ$ soit de 4,3 %.

Assez bonne précision, sachant que la circonférence terrestre est d'environ 40000 km notre erreur de $0,9^\circ$ représente une erreur de 100 km environ.

Nous pouvons maintenant utiliser la deuxième méthode.



La pente de notre droite expérimentale est donc de $p = 1500,5$.

Cette pente est équivalente à $p = h / \cos \alpha$ et nous pouvons donc déterminer $\alpha = \text{acos} (h / p)$

soit $\alpha = 0,3681 \text{ rad} = 21,089^\circ$.

La latitude vraie du lieu déterminée par G.P.S est $\alpha = 20,901^\circ$.

Notre écart est donc de $0,188^\circ$ soit de $0,9\%$.

Assez bonne précision, sachant que la circonférence terrestre est d'environ 40000 km notre erreur de $0,2^\circ$ représente une erreur de 22 km seulement !

Mesure de la longitude :

La mesure de la longitude nécessite de connaître, le même jour, l'heure du midi vrai sur le méridien d'origine.

Ce jour là, le midi solaire à Greenwich était à 11 h 53 minutes (11,883 h).

Notre midi vrai s'étant produit à 12 h 11 minutes et sachant que nous avons 4 h de décalage horaire avec le méridien origine, notre midi vrai est donc à 8 h 11 (8,183 h) nous pouvons donc calculer l'écart qui est de $11,883 - 8,183 = 3,70$ h.

Un tour complet de terre correspondant à 360° et à 24 h il est facile de déterminer notre longitude β
 $\beta = 3,7 * 360 / 24 = 55,505^\circ$

La longitude vraie mesurée par GPS étant de $55,484^\circ$, notre erreur absolue est $-0,021^\circ$ soit $0,04\%$
Jolie précision, sachant que la circonférence terrestre est d'environ 40000 km notre erreur de $0,02^\circ$ représente une erreur de 2,2 km seulement !

Résumé et analyse des résultats

Expérience	Méthode	latitude	longitude
1	1	$\alpha = 21,798$ soit $21^\circ 47' 53''$	$\beta = 55,505$ soit $55^\circ 30' 18''$
1	2	$\alpha = 20,883$ soit $20^\circ 52' 59''$	$\beta = 55,505$ soit $55^\circ 30' 18''$
2	1	$\alpha = 21,801$ soit $21^\circ 48' 4''$	$\beta = 55,505$ soit $55^\circ 30' 18''$
2	2	$\alpha = 21,089$ soit $21^\circ 5' 20''$	$\beta = 55,505$ soit $55^\circ 30' 18''$

Une visualisation par une image montre clairement la précision de nos résultats :

L'image « google earth » ci dessous visualise nos quatre déterminations.



On voit clairement que la méthode 2 donne de bien meilleurs résultats que la méthode 1.
D'autre part, l'expérience 1 donne de meilleurs résultats que l'expérience 2.

On peut expliquer ces deux observations de la façon suivante :

L'expérience 1 est en apparence « grossière » mais elle est finalement meilleure que l'expérience 2 en apparence plus « fine ». Ce résultat qui semble paradoxal à première vue, s'explique par le fait que l'on mesure de grandes valeurs avec une précision certes médiocre mais une erreur de mesure de 1 cm sur un ordre de grandeur d'environ 500 cm pour la longueur de l'ombre ou pour les abscisses mesurées ne représente finalement qu'une erreur de 0,2 %.

Pour l'expérience 2 on mesure des longueurs de l'ordre de 100 mm avec une précision du mm soit 1% d'erreur soit des mesures cinq fois moins précises globalement.

Par ailleurs la verticalité approximative du poteau de l'expérience 1 est peu critique, en revanche la verticalité du fil à plomb et l'horizontalité du plateau de l'expérience 2 sont très critiques en regard de la précision finale.

Lors de notre expérience, l'horizontalité du plateau a été obtenue avec des cales et un niveau mais elle n'était pas parfaite, or une erreur d'un simple $\frac{1}{2}$ degré va fausser d'autant le résultat final.

De plus le vent relativement violent à l'altitude de la terrasse faisait osciller le fil à plomb faussant également la mesure.

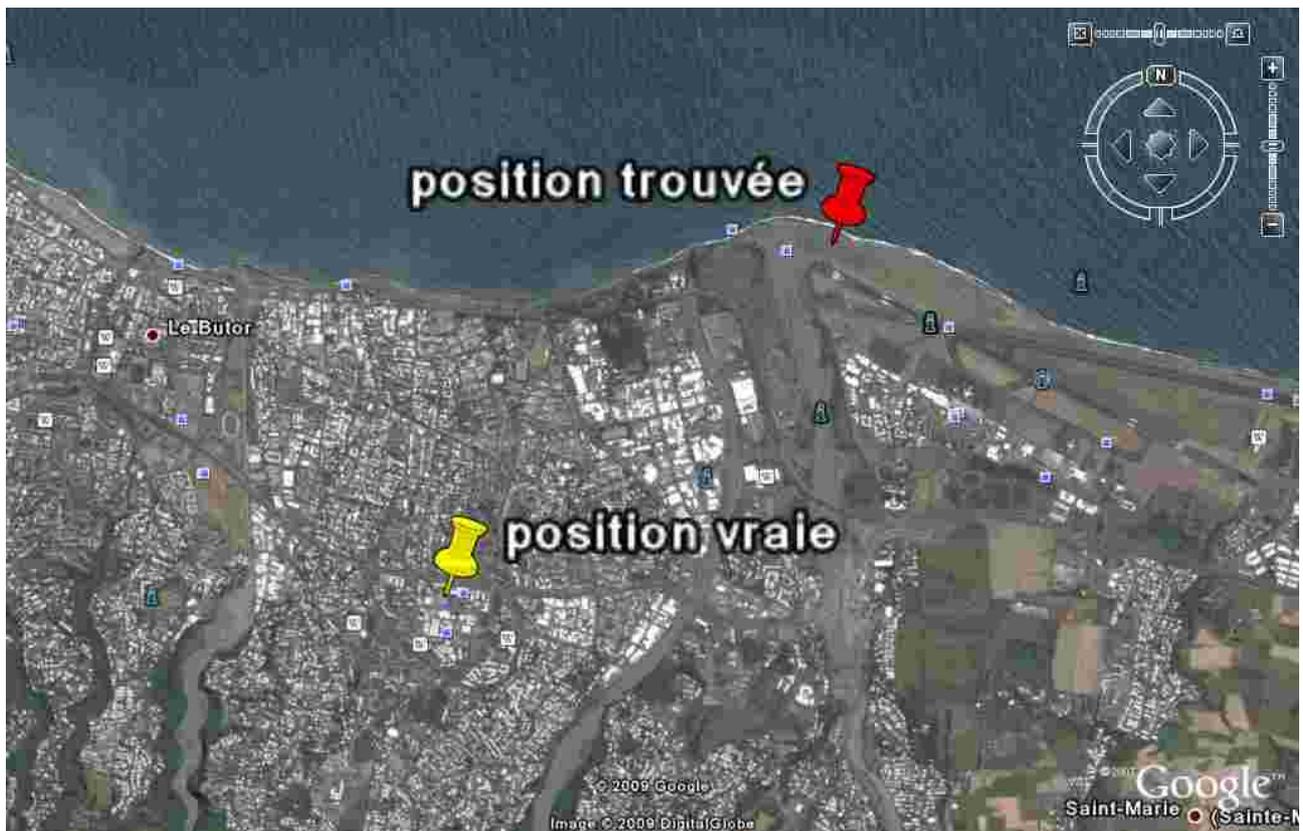
Il est donc assez logique que l'expérience 1 donne de meilleurs résultats que l'expérience 2.

La méthode 1 est basée sur une seule mesure, celle de l'ombre la plus courte.

La méthode 2 est beaucoup plus globale et prend en compte toutes les mesures par l'intervention de la droite dont on mesure la pente.

La précision de la méthode 2 sera finalement bien meilleure que celle de la méthode 1.

L'image « google earth » ci dessous correspond a notre détermination la plus précise (Expérience 1 – Méthode 2)



Conclusion :

Une belle petite expérience très instructive au point de vue pédagogique.

Le résultat obtenu étant très satisfaisant au final.

A refaire à l'avenir.....

J'attends avec impatience des nouvelles des Seychelles pour une détermination du rayon terrestre...

A suivre.....

Dr Thierry Brière

Professeur Agrégé

Département Chimie

Président de l'A.R.E.C.A